No.1

Tentukan penyelesaian dari $y'' - 4y = e^{2x}$ dengan metode variasi parameter

Jawab :

Dengan persamaan pelengkap kita peroleh solusi

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Metode variasi parameter menyatakan

$$y_p = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x)$$

Dapat diperoleh dengan menyelesaikan

$$v_1' e^{2x} + v_2' e^{-2x} = 0$$

$$v_1' 2e^{2x} - 2v_2' e^{-2x} = e^{2x}$$

Jadi kita peroleh $v_2' = -\frac{1}{4}e^{4x}$ *dan* $v_1' = 1/4.$ *jadi solusi umum dai persamaan diferensial diatas adalah*

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x} - \frac{1}{16} e^{2x}}$$

No.2

Tentukan solusi dari $y'' - 2y' - y = 0$ yang memenuhi $y(0) = 0$ dan $y'(0) = \sqrt{2}$

Jawab:

Dengan persamaan pelengkap dan rumus ABC kita peroleh

$$r_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Dengan demikian solusi umum untuk persamaan diferensial tersebut adalah

$$y = C_1 e^{(1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{2})x}$$

Akibatnya syarat $y(0) = 0$ *diperoleh* $C_1 = -C_2$*. Selanjutnya*

$$y' = C_1\left(1+\sqrt{2}\right)e^{(1+\sqrt{2})x} - C_1\left(1 - \sqrt{2}\right)e^{(1-\sqrt{2})x}$$

Sehingga diperoleh $\sqrt{2} = y'(0) = 2C_1\sqrt{2}$*, maka kita dapat menyimpulkan* $C_1 = \frac{1}{2}$ *dan*

$$\boldsymbol{y = \frac{1}{2} e^{(1+\sqrt{2})x} - \frac{1}{2} e^{(1-\sqrt{2})x}}$$

No.3

Hitunglah $\iint_S \frac{1}{x^2+y^2}\, dA$ dimana S adalah daerah diantara lingkaran $x^2+y^2=4$ dan $x^2+y^2=9$.

Jawab:

Dengan mentransformasi ke dalam koordinat polar kita peroleh

$$\iint_S \frac{1}{x^2+y^2}\, dA = \iint_S \frac{1}{r}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_2^3 \frac{1}{r} dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{3}{2}\right) d\theta = \mathbf{2\pi \ln\,(3/2)}$$

No.4

Hitunglah volume benda padat di bawah permukaan $z = x^2 + y^2$ di atas bidang xy dan di dalam silinder $x^2 + y^2 = 2y$

Jawab:

Misalkan $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta$ maka persamaan dari permukaan menjadi $z = r^2$ dan persamaan silinder menjadi $r = 2\sin\theta$, karena persamaan silinder yang dimiliki menyatakan sebuah silinder dengan jari-jari 1 yang bepusat di titik (0,1) maka berdasrkan sifat simetri kita dapat menggandakan hasil di oktan pertama menjadi

$$V = 2\iint_S (x^2+y^2)dA = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\theta} r^2 r\, dr\, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\,sin\theta} d\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\theta\, d\theta$$

$$= 8\left(\frac{3}{8}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mathbf{3\pi}}{\mathbf{2}}$$

No.5

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ pada elips yang merupakan perpotongan dari silinder $x^2+y^2=2$ dan bidang $y+z=1$.

Jawab:

Kita akan meminimumkan fungsi f *dengan kendala* $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ *dan* $h(x, y, z) = y + z - 1 = 0$. *Maka persamaan lagrange yang bersesuaian adalah*

$1 = 2\lambda x$ *............(1)*

$3 = 2\lambda y + \mu$ *.....(2)*

$3 = \mu$ *................(3)*

$x^2 + y^2 - 2 = 0$ *.....(4)*

$y + z - 1 = 0$ *....(5)*

Dari (1) kita peroleh $x = \frac{1}{2}\lambda$, *dari (2) dan (3),* $y = -\frac{1}{2}\lambda$, *dari (4) kita peroleh* $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. *Untuk* $\lambda = 1/2$ *menghasilkan titik kritis* $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ *dan* $\lambda = -\frac{1}{2}$ *menghasilkan titik kritis* $(x, y, z) = (-1, 1, 0)$. *Kita dapat menyimpulkan* $f(1, -1, 2) = 5$ *adalah nilai maksimum dan* $f(-1,1,0)$ *adalah nilai minimum.*

<u>No.6</u>

Tentukan apakah fungsi $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ memiliki limit atau tidak, jika ya tentukan limitnya

Jawab:

Pertama kita dapat mendekati limit dari $f(x, y)$ *dengan garis* $y = mx$ *maka kita peroleh*

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \infty$$

Lalu kita dapat pula mendekati dengan $y = mx^2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^4}{x^4 + m^2x^4} = \frac{m}{1 + m^2}$$

Karena nilai limit bergantung pada variable m *maka nilai limit dari* $f(x, y)$ *tidak ada.*