Try Out UAS Kalkulus 2

1. Tentukan himpunan kekonvergensian untuk deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$

2. Tentukan persamaan bidang yang mengandung garis x = 3t, y = 1 + t, z = 2t dan sejajar dengan perpotongan dari bidang-bidang 2x – y + z dan y + z + 1 = 0.

3. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari f(x,y,z) = x + 2y + 3z pada elips yang merupakan perpotongan dari silinder $x^2 + y^2 = 1$ dan bidang y + z = 1.

4. Hitunglah volume benda padat di bawah permukaan $z = x^2 + y^2$ di atas bidang xy dan di dalam silinder $x^2 + y^2 = 2y$.

5. Tentukan penyelesaian dari $y'' - 4y = e^{2x}$ dengan metode variasi parameter.

Jawaban:

1.

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^3+1} \div \frac{x^n}{n^3+1}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}|x|\left|\frac{n^3+1}{(n+1)^3+1}\right| = |x|$$

When $x = 1$, the series is

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3+1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+1} \le 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$, which converges.

When $x = -1$, the series is $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$ which converges absolutely since $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^3+1}$ converges.

The series converges on $-1 \le x \le 1$.

2.

Using $t = 0$, one point of the plane is (0, 1, 0).
$\langle 2,-1,1\rangle \times \langle 0, 1, 1\rangle = \langle -2,-2,2\rangle = -2\langle 1,1,-1\rangle$ is perpendicular to the normals of both planes, hence parallel to their line of intersection.
$\langle 3, 1, 2\rangle$ is parallel to the line in the plane we seek, thus $\langle 3, 1, 2\rangle \times \langle 1,1,-1\rangle = \langle -3,5,2\rangle$ is a normal to the plane. An equation of the plane is
$-3(x-0) + 5(y-1) + 2(z-0) = 0$ or
$-3x + 5y + 2z = 5$.

3.

Kita akan meminimumkan fungsi f dengan kendala $g(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$ dan $h(x,y,z)=y+z-1=0$. Maka persamaan lagrange yang bersesuaian adalah

$1=2\lambda x$ ....*(1)*

$3=2\lambda y+\mu$ .....*(2)*

$3=\mu$ ....*(3)*

$x^2+y^2-2=0$ .....*(4)*

$y+z-1=0$ ....*(5)*

Dari (1) kita peroleh $x=\frac{1}{2}\lambda$, dari (2) dan (3), $y=-\frac{1}{2}\lambda$, dari (4) kita peroleh $\lambda=\pm\frac{1}{2}$. Untuk $\lambda=1/2$ menghasilkan titik kritis $(x,y,z)=(1,-1,2)$ dan $\lambda=-\frac{1}{2}$ menghasilkan titik kritis $(x,y,z)=(-1,1,0)$. Kita dapat menyimpulkan $f(1,-1,2)=5$ adalah nilai maksimum dan $f(-1,1,0)$ adalah nilai minimum.

4.

Misalkan $x=r\cos\theta$ dan $y=r\sin\theta$ maka persamaan dari permukaan menjadi $z=r^2$ dan persamaan silinder menjadi $r=2\sin\theta$, karena persamaan silinder yang dimiliki menyatakan sebuah silinder dengan jari-jari 1 yang bepusat di titik (0,1) maka berdasrkan sifat simetri kita dapat menggandakan hasil di oktan pertama menjadi

$$V=2\iint_S (x^2+y^2)dA=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sin\theta} r^2 r\,dr\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\sin\theta} d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta$$

$$=8\left(\frac{3}{8}\frac{\pi}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{3\pi}{2}}$$

5.

Dengan persamaan pelengkap kita peroleh solusi

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$$

Metode variasi parameter menyatakan

$$y_p = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x)$$

Dapat diperoleh dengan menyelesaikan

$$v_1' e^{2x} + v_2' e^{-2x} = 0$$

$$v_1' 2e^{2x} - 2v_2' e^{-2x} = e^{2x}$$

Jadi kita peroleh $v_2' = -\frac{1}{4}e^{4x}$ *dan* $v_1' = 1/4$. *jadi solusi umum dai persamaan diferensial diatas adalah*

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} x e^{2x} - \frac{1}{16} e^{2x}}$$